Az $\{n\theta\}$ sorozat eloszlása

Matematika BSc szakdolgozat

Szerző:
Nagy-György Pál

Témavezető:
Dr. Waldhauser Tamás

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet

2018

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

Legyen θ irracionális szám. Tekintsük a θ szám többszöröseinek törtrészeiből álló sorozatot: $\{\theta\}, \{2\theta\} \dots$. Ez a sorozat egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, ami azt jelenti, hogy minden $[0, 1]$-beli részintervallumba a sorozat elemeinek annyiad része esik, amennyi az intervallum hossza (pontosabban lásd a 3.1. Definíciót). Ez az ekvidisztribúciós tétel, amelyet először Hermann Weyl, Waclaw Sierpinski és Piers Bohl bizonyítottak egymástól függetlenül 1909-ben, illetve 1910-ben.

Vegyük a sorozatnak csak az első N elemét. Ekkor a $P_n = \{n\theta\}$ pontok $N + 1$ részintervallumra osztják a $[0, 1]$ intervallumot. A három hézag tétel azt mondja ki, hogy ezeknek a részintervallumoknak a hossza legfeljebb 3-féle lehet (lásd a 3. és 4. ábrákat). Az állítást először Hugo Steinhaus sejtette meg 1957-ben. Már 1958-ban bebizonyította a tételt T. Sós Vera [9], Surányi János [10] és Stanisław Świerczkowki [11]. Azóta sokan adtak más bizonyításokat [2, 4, 5, 6, 7, 8]. Van a problémának egy változata, aminél az $n\theta$ számoknak nem a törtrészét, hanem a legközelebbi egésztől való távolságukat vesszük. Ekkor a sorozat első N eleme által a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumban meghatározott $N + 1$ részintervallum hossza legfeljebb 4-féle lehet [1].

A dolgozat 2. fejezetében a törtrész néhány egyszerű tulajdonságát mutatjuk be, amelyek a későbbiekben kelleni fognak. Az ekvidisztribúciós tételre két bizonyítást adunk. A 3. fejezetben A. Zorzi [13] elemi bizonyítását írjuk le, míg a 4. fejezetben a Weyl-kritérium segítségével bizonyítunk [3]. Az 5. fejezetben a három hézag tételnek N. B. Slater [8] által adott bizonyítását ismertetjük. A 6. fejezetben rácsok segítségével bizonyítunk J. Marklof és A. Strömbergsson cikke alapján [5]. A 7. fejezetben P. Shiu [7] cikke nyomán adunk egy harmadik bizonyítást is a három hézag tételre, ám ez egy kicsit *hézagos*.

2. Előkészületek

2.1. Lemma. *Minden x, y valós szám esetén*

$$\{x+y\} = \begin{cases} \{x\} + \{y\}, & \textit{ha } \{x\} + \{y\} < 1; \\ \{x\} + \{y\} - 1, & \textit{ha } \{x\} + \{y\} \geq 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Az $\{x + y\} = \{\lfloor x\rfloor + \{x\} + \lfloor y\rfloor + \{y\}\} = \{\{x\} + \{y\}\}$ azonosságból, valamint abból, hogy egy szám törtrésze 0 és 1 közé esik, következik az állítás. ■

2.2. Lemma. *Ha x egy nem egész valós szám, akkor*

$$\{-x\} = 1 - \{x\}.$$

Bizonyítás. Világos, hogy $\{-x\} = \{-(\lfloor x\rfloor + \{x\})\} = \{-\{x\}\} = \{1 - \{x\}\}$. Mivel $x \notin \mathbb{Z}$, ezért $0 < \{x\} < 1$, és így $\{1 - \{x\}\} = 1 - \{x\}$. ■

2.3. Lemma. *Minden x, y valós szám esetén*

$$\{x-y\} = \begin{cases} \{x\} - \{y\} + 1, & \textit{ha } \{x\} < \{y\}; \\ \{x\} - \{y\}, & \textit{ha } \{x\} \geq \{y\}. \end{cases}$$

Bizonyítás. Az állítás következik a 2.1. és a 2.2. Lemmából. ■

2.4. Lemma. *Tetszőleges x valós és k pozitív egész szám esetén $\{k\{x\}\} = \{kx\}$.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\{k\{x\}\} = \{kx - k\lfloor x \rfloor\} = \{kx\}$. ■

Jelölés. Legyen az n nemnegatív egész számra P_n a számegyenes $\{n\theta\}$ pontja.

2.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy az r és s nemnegatív egész számokra, valamint a θ irracionális számra teljesül, hogy $\{s\theta\} > \{r\theta\}$. Ekkor*

$$\{s\theta\} - \{r\theta\} = \begin{cases} \{(s-r)\theta\}, & \text{ha } s > r; \\ 1 - \{(r-s)\theta\}, & \text{ha } s < r. \end{cases}$$

Bizonyítás. Mivel $\{s\theta\} > \{r\theta\}$, ezért a 2.3. Lemma alapján

$$\{s\theta\} - \{r\theta\} = \{s\theta - r\theta\} = \{(s-r)\theta\}.$$

A lemma feltételeiből következik, hogy $(s-r)\theta$ nem egész, így alkalmazható a 2.2. Lemma: $\{(s-r)\theta\} = 1 - \{(r-s)\theta\}$. Tehát

$$\{s\theta\} - \{r\theta\} = \{(s-r)\theta\} = 1 - \{(r-s)\theta\}$$

teljesül $s > r$ és $s < r$ esetén is. ■

Vegyük észre, hogy a bizonyításban lényegtelen volt, hogy s vagy r a nagyobb. Minket később θ-nak csak a pozitív többszörösei fognak érdekelni, eszerint használjuk majd az $\{(s-r)\theta\}$, illetve az $1 - \{(r-s)\theta\}$ formulákat.

3. Ekvidisztribúció elemi úton

Jelölés. Az $(\{x_n\})_n$ sorozatra, az N pozitív egész számra és az $I \subseteq [0,1)$ intervallumra legyen

$$S_N(I) = |\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq N \text{ és } \{x_n\} \in I\}|.$$

3.1. Definíció. Az $(\{x_n\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon, ha bármely $[a,b) \subseteq [0,1)$ esetén

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N([a,b))}{N} = b - a.$$

3.2. Példa. Megmutatjuk, hogy az $a_n = \{\lg n\}$ sorozat nem egyenletes eloszlású $[0,1)$-en. Legyen k pozitív egész, l pedig olyan egész szám, amelyre $10^k < l \leq 2 \cdot 10^k$. Ekkor $k < \lg l \leq k + \lg 2 < k + 0,31$, amiből következik, hogy $0 < \{\lg l\} < 0,31$. Tehát $0 < a_l < 0,31$. Az N számot válasszuk 10^k-nak. Az eddigiek szerint az $a_{N+1}, \ldots, a_{2N}$ számok mind a $[0,\ 0{,}31)$ intervallumban vannak. Így $S_{2N}([0,\ 0{,}31)) \geq N$, amiből

$$\frac{S_{2N}([0,\ 0{,}31))}{2N} \geq \frac{1}{2} \tag{3.1}$$

adódik. Ha az a_n sorozat egyenletes eloszlású lenne $[0,1)$-en, akkor a 3.1. Definíció alapján teljesülne, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_{2\cdot 10^k}([0,\ 0{,}31))}{2 \cdot 10^k} = 0,31.$$

Azonban (3.1) miatt

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{S_{2\cdot 10^k}([0,\ 0{,}31))}{2 \cdot 10^k} \geq \frac{1}{2}.$$

Így az $a_n = \{\lg n\}$ sorozat nem egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon.

Ennek a fejezetnek a célja az, hogy megmutassuk, hogy irracionális θ esetén az $(\{n\theta\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon.

Szükségünk lesz az ekvidisztribúció következő jellemzésére:

3.3. Tétel. *Az $(\{x_n\})_n$ sorozat akkor és csak akkor egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon, ha bármely valós a szám esetén teljesül a következő:*

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_n\}-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_n+a\}\right)=0.$$

Bizonyítás. Rögzítsük a $b\in[0,1)$ és $N\in\mathbb{N}$ értékeket, és legyen

$$A=\{n\in\mathbb{N}\mid 1\le n\le N \text{ és } \{x_n\}\in[0,b)\}\quad\text{és}$$
$$B=\{n\in\mathbb{N}\mid 1\le n\le N \text{ és } \{x_n\}\in[b,1)\}.$$

A 2.3. Lemma szerint $\{x_n-b\}=\{x_n\}+1-b$, ha $n\in A$, és $\{x_n-b\}=\{x_n\}-b$, ha $n\in B$. Ezek alapján

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_n-b\}=\frac{1}{N}\sum_{n\in A}(\{x_n\}+1-b)+\frac{1}{N}\sum_{n\in B}(\{x_n\}-b)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_n\}+\frac{S_N([0,b))}{N}-b.$$

Átrendezve, valamint N-et tartatva végtelenbe kapjuk, hogy

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_n\}-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_n-b\}\right)=b-\lim_{N\to\infty}\frac{S_N([0,b))}{N}.$$

Megmutatjuk, hogy a jobb oldal pontosan akkor 0 minden $b\in[0,1)$ számra, ha az $(\{x_n\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású. Ha $(\{x_n\})_n$ egyenletes eloszlású, akkor a 3.1. Definícióból következik, hogy $b-\lim_{N\to\infty}\frac{S_N([0,b))}{N}=0$ minden $b\in[0,1)$-re. Ha pedig minden $b\in[0,1)$-re teljesül, hogy $\lim_{N\to\infty}\frac{S_N([0,b))}{N}=b$, akkor minden $[a,b)\subseteq[0,1)$ esetén

$$\lim_{N\to\infty}\frac{S_N([a,b))}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{S_N([0,b))-S_N([0,a))}{N}=b-a,$$

vagyis az $(\{x_n\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású.

Tehát akkor és csak akkor lesz

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_n\}-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_n-b\}\right)=0$$

minden $b\in[0,1)$ számra, ha az $(\{x_n\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású. Ez pedig ekvivalens a tétel állításával, hiszen az ott szereplő a felírható $a=k-b$ alakban, ahol k egy egész szám, b pedig egy 1-nél kisebb nemnegatív valós szám, és így $\{x_n+a\}=\{x_n-b\}$. ■

Az ekvidisztribúciónál egy gyengébb állítás, hogy irracionális θ esetén a P_n pontok sűrűn helyezkednek a $[0,1)$ intervallumon. Ez Kronecker tétele.

3.4. Tétel. *Bármely irracionális θ szám esetén az $(\{n\theta\})_n$ sorozat sűrű a $[0,1)$ intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen I tetszőleges ε hosszúságú részintervalluma $[0,1)$-nek. Legyen n olyan pozitív egész szám, amelyre $\frac{1}{n} < \varepsilon$ teljesül. Osszuk fel a $[0,1)$ intervallumot n darab $\frac{1}{n}$ hosszúságú részre. A skatulyaelv szerint az $\{1\theta\}, \{2\theta\}, \ldots, \{(n+1)\theta\}$ számok közül kettő ugyanabba az $\frac{1}{n}$ hosszú részintervallumba esik. Tegyük fel, hogy az $\{i\theta\}$ és a $\{j\theta\}$ számok esnek egy $\frac{1}{n}$ hosszú intervallumba, és $\{i\theta\} > \{j\theta\}$. Így $0 < \{i\theta\} - \{j\theta\} < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Használva a 2.5. Lemmát, kapjuk, hogy $i > j$ esetén $0 < \{(i-j)\theta\} < \varepsilon$, $j > i$ esetén pedig $0 < 1 - \{(j-i)\theta\} < \varepsilon$.

Először tegyük fel, hogy $i > j$, amikor is $0 < \{(i-j)\theta\} < \varepsilon$. Legyen $x = (i-j)\theta$. Mivel I egy ε hosszú részintervalluma $[0,1)$-nek, és $0 < \{x\} < \varepsilon$, ezért valamilyen k pozitív egészre a $k\{x\}$ szám benne van I-ben. Mivel $I \subseteq [0,1)$, ezért $0 < k\{x\} < 1$, vagyis a $k\{x\}$ szám megegyezik a saját törtrészével: $k\{x\} = \{k\{x\}\}$. A 2.4. Lemma alapján $\{k\{x\}\} = \{kx\}$. Tehát $\{kx\} = \{m\theta\} \in I$, ahol $m = k(i-j)$.

Most tegyük fel, hogy $j > i$. Ekkor $0 < 1-\{(j-i)\theta\} < \varepsilon$. Legyen $x = (j-i)\theta$. Az I intervallum bal végpontja legyen a, jobb végpontja pedig b. Legyen $J = (1-b, 1-a)$. Ez egy ε hosszú intervallum, ami részhalmaza $[0,1)$-nek. Mivel J hossza ε, és $0 < 1 - \{x\} < \varepsilon$, ezért létezik egy olyan pozitív egész k szám, amelyre $k(1-\{x\}) \in J$. Mivel $J \subseteq [0,1)$, ezért $k(1-\{x\}) = \{k(1-\{x\})\}$. A törtrészen belül hagyjunk el k-t, majd alkalmazzuk a 2.2. és a 2.4. Lemmát:

$$\{k(1-\{x\})\} = \{-k\{x\}\} = 1 - \{k\{x\}\} = 1 - \{kx\}.$$

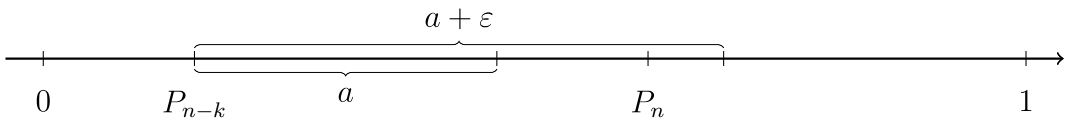
Tehát $1 - \{kx\} \in J$. Ez azt jeleni, hogy $1 - b < 1 - \{kx\} < 1 - a$. Vonjunk ki 1-et, majd szorozzunk -1-gyel: $b > \{kx\} > a$. Ebből következik, hogy $\{kx\} = \{m\theta\} \in I$, ahol $m = k(j-i)$.

Mindkét esetben azt kaptuk, hogy az $(\{m\theta\})_m$ sorozatnak van olyan eleme, ami I-be esik. Ez azt jelenti, hogy az $(\{m\theta\})_m$ sorozat sűrű a $[0,1)$ intervallumon.

■

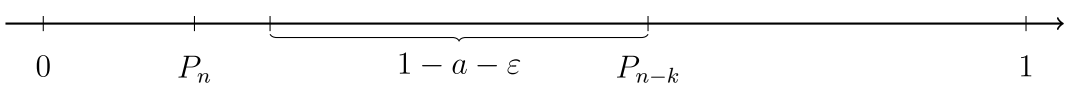
3.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy $a < \{k\theta\} < a + \varepsilon$, ahol $a \in [0,1)$, $\varepsilon > 0$, k pozitív egész, θ pedig irracionális szám. Ekkor $\{n\theta\} < \{(n-k)\theta + a\} + \varepsilon$ minden $n > k$ egész szám esetén.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\{(n-k)\theta\} < \{n\theta\}$.



A 2.5. Lemma szerint a P_{n-k} és a P_n pontok távolsága $\{n\theta\} - \{(n-k)\theta\} = \{k\theta\}$. Mivel $a < \{k\theta\} < a + \varepsilon$, ezért ha P_{n-k}-tól felmérünk jobbra a-t és $a+\varepsilon$-t, akkor az így kapott két pont között helyezkedik el P_n. Ez képletekkel azt jelenti, hogy $\{(n-k)\theta\} + a < \{n\theta\} < \{(n-k)\theta\} + a + \varepsilon$. Mivel $a \in [0,1)$, ezért $\{(n-k)\theta\} + \{a\} = \{(n-k)\theta\} + a$, amiről tudjuk, hogy kisebb, mint $\{n\theta\}$, ami pedig kisebb 1-nél. Tehát $\{(n-k)\theta\} + \{a\} < 1$, és így a 2.1. Lemma szerint $\{(n-k)\theta\} + a = \{(n-k)\theta\} + \{a\} = \{(n-k)\theta + a\}$. Így az $\{n\theta\} < \{(n-k)\theta\} + a + \varepsilon$ egyenlőtlenség helyett írhatjuk, hogy $\{n\theta\} < \{(n-k)\theta + a\} + \varepsilon$.

Most tegyük fel, hogy $\{n\theta\} < \{(n-k)\theta\}$.



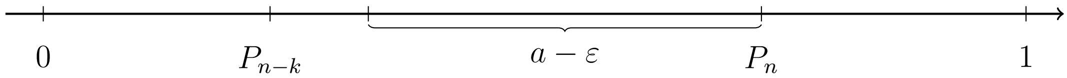
A P_n és a P_{n-k} pontok távolsága a 2.5. Lemma alapján $\{(n-k)\theta\}-\{n\theta\} = 1-\{k\theta\}$. Mivel $\{k\theta\} < a+\varepsilon$, ezért $1-\{k\theta\} > 1-a-\varepsilon$. Így ha a P_{n-k} ponttól balra felmérünk $1-a-\varepsilon$-t, akkor az így kapott pont P_n-től jobbra lesz. Tehát $\{n\theta\} < \{(n-k)\theta\} - (1-a-\varepsilon)$, és mivel $a \in [0,1)$, ezért a jobb oldal nem más, mint $\{(n-k)\theta\}+\{a\}-1+\varepsilon$. A 2.1. Lemma miatt $\{(n-k)\theta\}+\{a\}-1 \leq \{(n-k)\theta+a\}$. Így $\{n\theta\} < \{(n-k)\theta\}+\{a\}-1+\varepsilon \leq \{(n-k)\theta+a\}+\varepsilon$.

Mindkét esetben azt kaptuk, hogy $\{n\theta\} < \{(n-k)\theta+a\}+\varepsilon$.

■

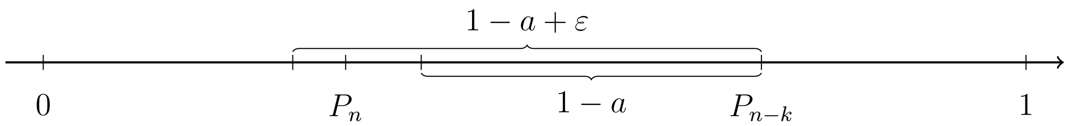
3.6. Lemma. *Tegyük fel, hogy $a-\varepsilon < \{k\theta\} < a$, ahol $a \in [0,1)$, $\varepsilon > 0$, k pozitív egész, θ pedig irracionális szám. Ekkor $\{(n-k)\theta+a\} < \{n\theta\}+\varepsilon$ minden $n > k$ egész szám esetén.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\{(n-k)\theta\} < \{n\theta\}$.



A 2.5. Lemma szerint a P_{n-k} és a P_n pontok távolsága $\{n\theta\}-\{(n-k)\theta\} = \{k\theta\}$. Mivel $a-\varepsilon < \{k\theta\}$, ezért ha P_n-től felmérünk balra $a-\varepsilon$-t, akkor az így kapott pont P_{n-k}-tól jobbra lesz. Ez képletekkel azt jelenti, hogy $\{(n-k)\theta\} < \{n\theta\}-a+\varepsilon$, ami ekvivalens azzal, hogy $\{(n-k)\theta\}+a < \{n\theta\}+\varepsilon$. A 2.1. Lemma miatt $\{(n-k)\theta+a\} \leq \{(n-k)\theta\}+\{a\}$, és mivel $a \in [0,1)$, ezért a jobb oldal egyenlő $\{(n-k)\theta\}+a$-val. Tehát $\{(n-k)\theta+a\} \leq \{(n-k)\theta\}+a < \{n\theta\}+\varepsilon$.

Most tegyük fel, hogy $\{n\theta\} < \{(n-k)\theta\}$.



A P_n és P_{n-k} pontok távolsága a 2.5. Lemma alapján $\{(n-k)\theta\}-\{n\theta\} = 1-\{k\theta\}$. Mivel $a-\varepsilon < \{k\theta\} < a$, ezért $1-a+\varepsilon > 1-\{k\theta\} > 1-a$. Így, ha felmérünk a P_{n-k} ponttól balra $1-a+\varepsilon$-t és $1-a$-t, akkor P_n az így kapott két pont között helyezkedik el. Eszerint $\{(n-k)\theta\}-1+a-\varepsilon < \{n\theta\} < \{(n-k)\theta\}-1+a$. Az $\{n\theta\} < \{(n-k)\theta\}-1+a$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\{(n-k)\theta\}+a > 1+\{n\theta\} \geq 1$. Fölhasználva, hogy $a = \{a\}$, kapjuk, hogy $\{(n-k)\theta\}+\{a\} > 1$. Így a 2.1. Lemma szerint $\{(n-k)\theta+a\} = \{(n-k)\theta\}+\{a\}-1 = \{(n-k)\theta\}+a-1$. Így az $\{(n-k)\theta\}-1+a-\varepsilon < \{n\theta\}$ egyenlőtlenség helyett írható, hogy $\{(n-k)\theta+a\}-\varepsilon < \{n\theta\}$, ami átrendezve $\{(n-k)\theta+a\} < \{n\theta\}+\varepsilon$. ■

Most már van elég eszközünk, hogy bebizonyítsuk az ekvidisztribúciós tételt.

3.7. Tétel. *Bármely irracionális θ szám esetén az $(\{n\theta\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon.*

Bizonyítás. A 3.3. Tételt szeretnénk alkalmazni az $x_n = n\theta$ sorozatra. Tehát azt kell megmutatni, hogy minden valós a számra

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{n\theta\} - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{n\theta+a\}\right) = 0.$$

Világos, hogy ezt elég megmutatni azokra az a számokra, amelyekre $0 < a < 1$. Rögzítsük a-t, és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A 3.4. Tétel szerint az $(\{n\theta\})_n$ sorozat sűrű a $[0,1)$ intervallumon, így létezik $k \in \mathbb{N}$, amelyre $a < \{k\theta\} < a + \varepsilon$. Legyen $N > k$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{N}\{n\theta\}-\sum_{n=1}^{N}\{n\theta+a\} = \sum_{n=1}^{k}\{n\theta\}+\sum_{n=k+1}^{N}(\{n\theta\}-\{(n-k)\theta+a\})-\sum_{n=N-k+1}^{N}\{n\theta+a\}.$$

Egy szám törtrésze 0 és 1 között van, így $\{n\theta\} < 1$ és $\{n\theta + a\} \geq 0$. A 3.5. Lemma szerint $n > k$ esetén $\{n\theta\} - \{(n-k)\theta + a\} < \varepsilon$. Ezeket a becsléseket felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{k}\{n\theta\}+\sum_{n=k+1}^{N}(\{n\theta\}-\{(n-k)\theta+a\})-\sum_{n=N-k+1}^{N}\{n\theta+a\} < k+(N-k)\varepsilon < k+N\varepsilon.$$

Tehát

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{n\theta\} - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{n\theta+a\} < \frac{1}{N}(k+N\varepsilon) = \frac{k}{N}+\varepsilon,$$

és így

$$\limsup_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{n\theta\} - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{n\theta+a\}\right) \leq \lim_{N\to\infty}\left(\frac{k}{N}+\varepsilon\right) = \varepsilon.$$

Most legyen k olyan pozitív egész, amelyre $a - \varepsilon < \{k\theta\} < a$. A 3.4. Tétel miatt van ilyen k. Legyen $N > k$. Csakúgy, mint az előbb, most is igaz, hogy

$$\sum_{n=1}^{N}\{n\theta\}-\sum_{n=1}^{N}\{n\theta+a\} = \sum_{n=1}^{k}\{n\theta\}+\sum_{n=k+1}^{N}(\{n\theta\}-\{(n-k)\theta+a\})-\sum_{n=N-k+1}^{N}\{n\theta+a\}.$$

Egy szám törtrésze 0 és 1 közé esik, így $\{n\theta\} \geq 0$ és $\{n\theta + a\} < 1$. A 3.6. Lemma szerint $n > k$ esetén $\{n\theta\} - \{(n-k)\theta + a\} > -\varepsilon$. Ezen becslések alapján

$$\sum_{n=1}^{k}\{n\theta\}+\sum_{n=k+1}^{N}(\{n\theta\}-\{(n-k)\theta+a\})-\sum_{n=N-k+1}^{N}\{n\theta+a\} > -(N-k)\varepsilon-k > -N\varepsilon-k.$$

Tehát

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{n\theta\} - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{n\theta+a\} > \frac{1}{N}(-N\varepsilon-k) = -\varepsilon-\frac{k}{N},$$

amiből következik, hogy

$$\liminf_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{n\theta\} - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{n\theta+a\}\right) \geq \lim_{N\to\infty}\left(-\varepsilon-\frac{k}{N}\right) = -\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{n\theta\} - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{n\theta+a\}\right) = 0.$$

A 3.3. Tétel szerint az $(\{n\theta\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon. ■

4. Weyl-kritérium

Legyen $c_{[a,b)}$ az $[a,b) \subseteq [0,1)$ intervallum karakterisztikus függvénye, tehát

$$c_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a \leq x < b; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

4.1. Lemma. *Az $(\{x_n\})_n$ sorozat pontosan akkor egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon, ha bármely $[a,b) \subseteq [0,1)$ esetén*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} c_{[a,b)}(\{x_n\}) = \int_0^1 c_{[a,b)}(x)dx.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $\sum_{n=1}^{N} c_{[a,b)}(\{x_n\})$ ugyanaz, mint $S_N([a,b))$, valamint $\int_0^1 c_{[a,b)}(x)dx = b - a$. Így a 3.1. Definícióból következik az állítás. ■

4.2. Lemma. *Az $(\{x_n\})_n$ sorozat akkor és csak akkor egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon, ha minden, a $[0,1]$ intervallumon értelmezett valós értékű folytonos f függvényre teljesül, hogy*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)dx. \tag{4.1}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(\{x_n\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon. Legyen $f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} d_i c_{[a_i,a_{i+1})}(x)$ egy $[0,1]$-en értelmezett lépcsős függvény, ahol $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = 1$. Világos, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=0}^{k-1} d_i c_{[a_i,a_{i+1})}(\{x_n\}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} d_i \left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} c_{[a_i,a_{i+1})}(\{x_n\}) \right).\end{aligned}$$

Mivel $(\{x_n\})_n$ egyenletes eloszású $[0,1)$-en, ezért a 4.1. Lemma miatt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} c_{[a_i,a_{i+1})}(\{x_n\}) = \int_0^1 c_{[a_i,a_{i+1})}(x)dx$$

minden $i = 0,1,\ldots,k-1$ esetén. Így

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{k-1} d_i \left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} c_{[a_i,a_{i+1})}(\{x_n\}) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} d_i \int_0^1 c_{[a_i,a_{i+1})}(x)dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{k-1} d_i c_{[a_i,a_{i+1})}(x)dx \right) \\ &= \int_0^1 f(x)dx.\end{aligned}$$

Tehát az f lépcsős függvényre teljesül a (4.1) egyenlőség.

Most legyen f tetszőleges $[0,1]$-en értelmezett valós értékű folytonos függvény. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az f függvény folytonos, így Riemann-integrálható. A Riemann-integrál definíciója alapján léteznek olyan f_1 és f_2 lépcsős függvények, amelyekre $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ minden $x \in [0,1]$ esetén és $\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))dx \leq \varepsilon$. Teljesül a következő egyenlőtlenséglánc:

$$\int_0^1 f(x)dx - \varepsilon \leq \int_0^1 f_1(x)dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f_1(\{x_n\}) \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(\{x_n\})$$

$$\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(\{x_n\}) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f_2(\{x_n\}) = \int_0^1 f_2(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx + \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért ebből már következik, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)dx,$$

tehát minden $[0,1]$-en értelmezett valós értékű folytonos f függvényre teljesül a (4.1) egyenlőség.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy az $(\{x_n\})_n$ sorozatra minden $[0,1]$-en értelmezett valós értékű folytonos függvényre teljesül (4.1). Legyen $[a,b)$ tetszőleges részintervalluma $[0,1)$-nek. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor léteznek olyan $[0,1]$-en értelmezett g_1 és g_2 folytonos függvények, hogy $g_1(x) \leq c_{[a,b)}(x) \leq g_2(x)$ minden $x \in [0,1]$-re, és $\int_0^1 (g_2(x) - g_1(x))dx \leq \varepsilon$. Ezek alapján teljesül, hogy

$$\int_0^1 c_{[a,b)}(x) - \varepsilon \leq \int_0^1 g_2(x)dx - \varepsilon \leq \int_0^1 g_1(x)dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N g_1(\{x_n\})$$

$$\leq \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N c_{[a,b)}(\{x_n\}) \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N c_{[a,b)}(\{x_n\}) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N g_2(\{x_n\})$$

$$= \int_0^1 g_2(x)dx \leq \int_0^1 g_1(x)dx + \varepsilon \leq \int_0^1 c_{[a,b)}(x) + \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőlegesen kicsi lehet, ezért

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N c_{[a,b)}(\{x_n\}) = \int_0^1 c_{[a,b)}(x)dx.$$

Így a 4.1. Lemma szerint az $(\{x_n\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon. ■

4.3. Lemma. *Az $(\{x_n\})_n$ sorozat akkor és csak akkor egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon, ha minden, valós számokon értelmezett 1 periódusú komplex értékű folytonos f függvényre teljesül, hogy*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x)dx. \tag{4.2}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(\{x_n\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású $[0,1)$-en. Legyen f tetszőleges, valós számokon értelmezett 1 periódusú komplex értékű folytonos függvény. Ekkor f felírható $f(x)=u(x)+iv(x)$ alakban, ahol az u és v függvények valós értékűek. Mivel f folytonos és 1 periódusú, ezért az u és v függvények is folytonosak és 1 periódusúak. A 4.2. Lemma miatt az u és v folytonos függvényekre teljesül, hogy

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u(\{x_n\})=\int_0^1 u(x)dx \quad \text{és} \quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}v(\{x_n\})=\int_0^1 v(x)dx.$$

Az 1-periodicitás miatt a törtrész elhagyható:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u(x_n)=\int_0^1 u(x)dx \quad \text{és} \quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}v(x_n)=\int_0^1 v(x)dx.$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N}u(x_n)+i\sum_{n=1}^{N}v(x_n)\right)=\int_0^1 u(x)dx+i\int_0^1 v(x)dx,$$

és így

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x_n)=\int_0^1 f(x)dx.$$

Most tegyük fel, hogy a (4.2) egyenlőség teljesül minden, valós számokon értelmezett 1 periódusú komplex értékű folytonos f függvényre. Azt kell meggondolni, hogy a 4.2. Lemma bizonyításának második felében használt g_1 és g_2 függvények úgy is megválaszthatóak, hogy $g_1(0)=g_1(1)$ és $g_2(0)=g_2(1)$. Az 1. ábra mutat egy példát arra, hogy hogyan válasszuk a g_1 és g_2 függvényeket, ha $a\neq 0$ és $b\neq 1$. A 2. ábrán az $a=0$ eset látható. Ehhez hasonló a $b=1$ eset.

A g_1 és g_2 függvényeket terjesszük ki $\mathbb{R}$-re úgy, hogy 1-periodikus függvényeket kapjunk. Ezekre a függvényekre teljesül (4.2). Innentől a befejezés lényegében ugyanaz, mint a 4.2. Lemmánál. ■

Az $f(x)=e^{2\pi ihx}$ alakú függvények, ahol h nemnulla egész szám, folytonosak és 1-periodikusak. Így a 4.3. Lemma értelmében, ha az $(\{x_n\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon, akkor az ilyen f-ekre teljesül a (4.2) egyenlőség. A fordított irány érdekes: az $f(x)=e^{2\pi ihx}$ alakú függvények már meghatározzák, hogy egy $(\{x_n\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású-e $[0,1)$-en. Erről szól a Weyl-kritérium.

4.4. Tétel (Weyl-kritérium). *Az $(\{x_n\})_n$ sorozat akkor és csak akkor egyenletes eloszlású $[0,1)$-en, ha minden $h\neq 0$ egész esetén*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ihx_n}=0. \tag{4.3}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(\{x_n\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású $[0,1)$-en. A 4.3. Lemma alapján minden $h\neq 0$ egész szám esetén

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ihx_n}=\int_0^1 e^{2\pi ihx}dx.$$

Megmutatjuk, hogy a jobb oldal 0. Az Euler-képlet szerint $e^{2\pi ihx} = \cos(2\pi hx) + i\sin(2\pi hx)$, és így

$$\int_0^1 e^{2\pi ihx} = \int_0^1 \cos(2\pi hx)dx + i\int_0^1 \sin(2\pi hx)dx.$$

Legyen $u = 2\pi hx$. Ekkor $\frac{du}{dx} = 2\pi h$. Használva ezt a helyettesítést, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \cos(2\pi hx)dx + i\int_0^1 \sin(2\pi hx)dx \\
&= \int_0^{2\pi h} \cos(u)\frac{du}{2\pi h} + i\int_0^{2\pi h} \sin(u)\frac{du}{2\pi h} \\
&= \frac{1}{2\pi h}\left[\sin(u)\right]_0^{2\pi h} + \frac{i}{2\pi h}\left[-\cos(u)\right]_0^{2\pi h} = 0,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

amiből következik az állítás „csak akkor” része.

Most tegyük fel, hogy az $(x_n)_n$ sorozat olyan, hogy (4.3) teljesül minden $h \neq 0$ egészre. Belátjuk, hogy ekkor (4.2) teljesül minden $\mathbb{R}$-en értelmezett 1 periódusú komplex értékű folytonos f függvényre. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Weierstrass approximációs tétele szerint létezik egy $\Psi(x)$ trigonometrikus polinom, vagyis az $e^{2\pi ihx}$ $(h \in \mathbb{Z})$ függvényekeknek egy véges, komplex együtthatós lineáris kombinációja, amelyre

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |f(x) - \Psi(x)| \leq \varepsilon. \tag{4.5}$$

A $\Psi(x)$ függvény tehát ilyen alakba írható:

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{t} a_k e^{2\pi ih_k x} \qquad a_k \in \mathbb{C},\ h_k \in \mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)\right| \leq \left|\int_0^1 (f(x) - \Psi(x))dx\right| \\
&+ \left|\int_0^1 \Psi(x)dx - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Psi(x_n)\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f(x_n) - \Psi(x_n))\right|.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Az első és a harmadik tag a jobb oldalon (4.5) miatt legfeljebb ε az N értékétől függetlenül.

Tudjuk, hogy $h_k \neq 0$ esetén (4.3) és (4.4) szerint

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ih_k x_n} = 0 = \int_0^1 e^{2\pi ih_k x}dx, \tag{4.8}$$

továbbá $h_k = 0$ esetén

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ih_k x_n} = 1 = \int_0^1 e^{2\pi ih_k x}dx. \tag{4.9}$$

Mivel (4.6) egy véges összeg, ezért (4.8) és (4.9) miatt $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Psi(x_n) \to \int_0^1 \Psi(x)dx$, ezért elég nagy N esetén (4.7) jobb oldalán a második tag legfeljebb ε. Ezekből következik, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Így a 4.3. Lemma miatt az $(\{x_n\})_n$ sorozat egyenletes eloszlású $[0,1)$-en. ■

A Weyl-kritériumot alkalmazva az $(\{n\theta\})_n$ sorozatra a 3.7. Tétel egy újabb bizonyítását nyerjük. Legyen h tetszőleges nemnulla egész szám. Mivel θ irracionális, ezért $h\theta \notin \mathbb{Z}$, és így $e^{2\pi i h\theta} \neq 1$. A mértani sorozat összegképletét használva

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h n\theta}\right| = \left|\frac{1}{N} e^{2\pi i h\theta}\frac{e^{2\pi i h N\theta}-1}{e^{2\pi i h\theta}-1}\right| = \frac{\left|e^{2\pi i h N\theta}-1\right|}{N\left|e^{2\pi i h\theta}-1\right|}.$$

Mivel $e^{2\pi i h N\theta}$ egy 1 abszolútértékű komplex szám, ezért $\left|e^{2\pi i h N\theta}-1\right| \leq 2$. Így

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h n\theta}\right| \leq \frac{1}{N}\frac{2}{\left|e^{2\pi i h\theta}-1\right|},$$

ahol $\frac{2}{\left|e^{2\pi i h\theta}-1\right|}$ egy konstans. Így

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h n\theta} = 0.$$

A 4.4. Tétel szerint ebből következik, hogy az $\{n\theta\}_n$ sorozat egyenletes eloszlású $[0,1)$-en.

A következő tételben az ekvidisztribúciós tétel egy alkalmazását mutatjuk be [12].

4.5. Tétel. *Annak a valószínűsége, hogy egy 2-hatvány tízes számrendszerbeli első számjegye k ($k = 1,2,\ldots,9$), $\lg(k+1) - \lg k$.*

Bizonyítás. A 2^n hatvány első számjegye pontosan akkor k, ha valamilyen l nemnegatív egészre $k\cdot 10^l \leq 2^n < (k+1)\cdot 10^l$. Ez 10-es alapú logaritmust véve ekvivalens azzal, hogy

$$\lg k + l \leq n\cdot \lg 2 < \lg(k+1) + l.$$

Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $\lg k \leq \{n\cdot \lg 2\} < \lg(k+1)$, hiszen $0 \leq \lg k < \lg(k+1) \leq 1$.

Így az a $p(k)$ valószínűség, hogy egy véletlenszerűen választott 2-hatvány k-val kezdődik, a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} p(k) &= \lim_{N\to\infty} \frac{|\{n \mid 1 \leq n \leq N \text{ és } 2^n \text{ első számjegye } k\}|}{N} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{|\{n \mid 1 \leq n \leq N \text{ és } \lg k \leq \{n\cdot \lg 2\} < \lg(k+1)\}|}{N}. \end{aligned}$$

Mivel $\lg 2$ egy irracionális szám, ezért a 3.7. Tétel értelmében az $a_n = \{n\cdot \lg 2\}$ sorozat egyenletes eloszlású a $[0,1)$ intervallumon. Így a 3.1. Definíció alapján

$$p(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{|\{n \,|\, 1 \le n \le N \text{ és } \lg k \le \{n \cdot \lg 2\} < \lg(k+1)\}|}{N}$$
$$= \lg(k+1) - \lg k = \lg(1 + \frac{1}{k}).$$

Így a $p(k)$ valószínűségek közelítő értékei az egyes k értékekre a következők:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(k)$	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079	0,067	0,058	0,051	0,046

A táblázatból például látható, hogy egy véletlenszerűen választott 2-hatvány több, mint $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 1-essel, 2-essel vagy 3-assal kezdődik.

■

5. A három hézag tétel

Legyen θ egy irracionális, N pedig egy pozitív egész szám. Ekkor θ irracionalitása miatt az $\{1\theta\}, \{2\theta\}, \ldots, \{N\theta\}$ számok különbözőek és nem nullák. Korábban beláttuk, hogy a $P_0, P_1, \ldots$ pontok sűrűn helyezkednek el a $[0, 1)$ intervallumon (lásd a 3.4. Tételt). Ezzel szemben egy konkrét N-re a $P_0, P_1, \ldots, P_N$ pontok meglehetősen szabályosan helyezkednek el. A három hézag tétel azt állítja, hogy a számegyenesen két szomszédos P_i pont között legfeljebb 3-féle távolság lép fel. Ezt mutatja a 3. ábra a $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ és $N = 14$ esetre. A P_i pontokat az egységnyi kerületű körön is tekinthetjük. A P_0 pontot helyezzük el egy tetszőleges helyre a körvonalon, a P_i pontot $i \ge 1$-re pedig úgy kapjuk, hogy a körvonalon P_0-tól pozitív irányban fölmérünk i-szer θ-t. Itt a három hézag tétel azt jelenti, hogy két, a körvonalon szomszédos P_i pont közötti ívnek a hossza legfeljebb 3-féle lehet. Ezzel ekvivalens, hogy ezekhez az ívekhez tartozó körcikkek területe legfeljebb 3-féle lehet. Ezt láthatjuk a 4. ábrán ismét a $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ és $N = 14$ esetre.

Az $\{1\theta\}, \ldots, \{N\theta\}$ számok közül a legkisebb legyen $\{a\theta\}$, a legnagyobb pedig $\{b\theta\}$. Vezessük be az $\alpha = \{a\theta\}$ és a $\beta = 1 - \{b\theta\}$ jelöléseket. Vegyük észre, hogy α nem lehet egyenlő β-val. Ha ugyanis egyenlőek lennének, akkor fennállna az $\{a\theta\} + \{b\theta\} = 1$ egyenlőség, amiből következne, hogy $(a + b)\theta$ egy egész szám, de ez θ irracionalitása miatt nem lehetséges.

5.1. Lemma. *Az előbbi jelölésekkel $N + 1 \le a + b$.*

Bizonyítás. A 2.1. Lemma szerint $\{(a + b)\theta\}$ kétféle lehet:

$$\begin{aligned} \{(a+b)\theta\} &= \{a\theta\} + \{b\theta\} > \{b\theta\}, \quad \text{vagy} \\ \{(a+b)\theta\} &= \{a\theta\} + \{b\theta\} - 1 < \{a\theta\}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Az a és b számok definíciója miatt ez csak úgy lehetséges, ha $a+b$ nincs az $1, \ldots, N$ számok között, vagyis $N + 1 \le a + b$. ■

5.2. Lemma. *Ha r és s a $0, 1, \ldots, N$ számok közül kerül ki, és P_s a számegyenesen jobbra van P_r-től, akkor*

$$P_rP_s = \begin{cases} \{(s-r)\theta\}, & ha\ s > r; \\ 1 - \{(r-s)\theta\}, & ha\ s < r, \end{cases}$$

továbbá

$$P_rP_s \geq \begin{cases} \alpha, & \textit{ha } s > r; \\ \beta, & \textit{ha } s < r, \end{cases}$$

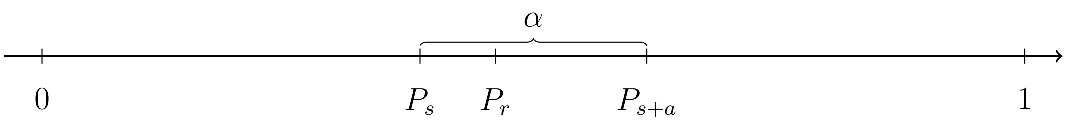
és egyenlőség az első esetben pontosan akkor van, ha $s - r = a$, a második esetben pedig akkor, ha $r - s = b$.

Bizonyítás. Az állítás első fele ugyanaz, mint a 2.5. Lemma, csak más megfogalmazásban. A P_rP_s távolság képletéből, valamint az α és β számok definíciójából következik az állítás második fele. ■

A P_r $(r = 0, \ldots, N)$ pontok $N + 1$ részre osztják a $[0, 1]$ intervallumot, ezeket nevezzük hézagoknak. Azt mondjuk, hogy a P_r pont közvetlenül megelőzi a P_s pontot, ha P_s jobbra van P_r-től, és nincs köztük olyan P_v pont, ahol $1 \leq v \leq N$. Ekkor (P_r, P_s) egy hézag, melynek hosszát P_rP_s fogja jelölni.

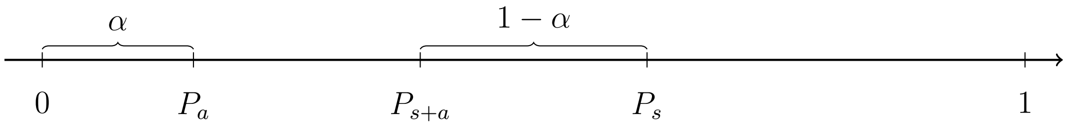
5.3. Tétel. *Ha $0 \leq s \leq N - a$, akkor a P_s pont közvetlenül megelőzi a P_{s+a} pontot, és $P_sP_{s+a} = \alpha$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a P_s pont balra van a P_{s+a} ponttól. Indirekt módon tegyük fel, hogy a P_s és P_{s+a} pontok között van egy P_r pont $(1 \leq r \leq N)$.



Az 5.2. Lemma alapján $P_sP_{s+a} = \alpha$. Ismét az 5.2. Lemma szerint $r > s$ esetén $P_sP_r \geq \alpha$, $r < s < s + a$ esetén pedig $P_rP_{s+a} \geq \alpha$. Ez viszont ellentmondás, mert így a P_r pont nem lehet P_s és P_{s+a} között.

Most azt tegyük fel, hogy a P_{s+a} pont van balra P_s-től.

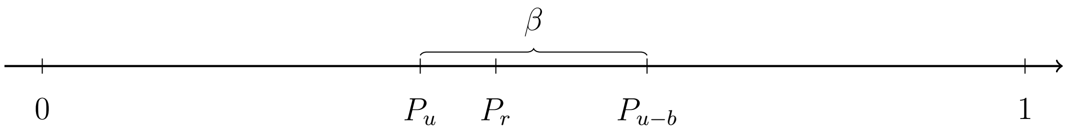


Az α szám definíciója és az 5.2. Lemma miatt $P_0P_a = \alpha$ és $P_{s+a}P_s = 1 - \alpha$. Így a P_0P_a és a $P_{s+a}P_s$ szakaszok együtt kiadják a teljes $[0, 1]$ intervallumot. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha $P_s = 1$, ami ellentmondás.

■

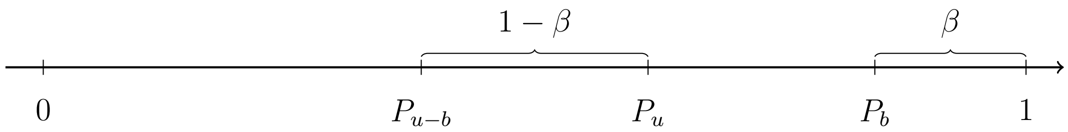
5.4. Tétel. *Ha $b < u \leq N$, akkor P_u közvetlenül megelőzi a P_{u-b} pontot, és $P_uP_{u-b} = \beta$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy P_{u-b} jobbra van P_u-tól. Indirekt módon tegyük fel, hogy a P_u és P_{u-b} pontok között van egy P_r pont $(1 \leq r \leq N)$.



Az 5.2. Lemma szerint $P_uP_{u-b} = \beta$. Alkalmazzuk megint az 5.2. Lemmát: $r < u$ esetén $P_uP_r \geq \beta$, az $r > u > u - b$ esetben pedig $P_rP_{u-b} \geq \beta$. Ez ellentmondás, mert így P_r nem lehet P_u és P_{u-b} között.

Most tegyük fel, hogy P_{u-b} balra van P_u-tól.



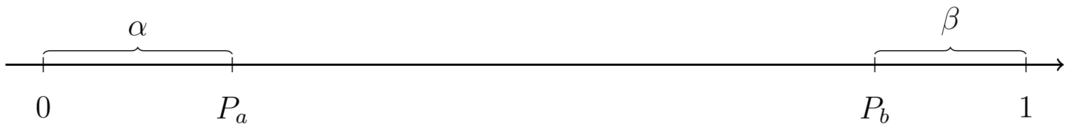
A P_b pont távolsága 1-től β, a $P_{u-b}P_u$ távolság pedig az 5.2. Lemma szerint $\{b\theta\} = 1-\beta$. A (P_{u-b}, P_u) és $(P_b, 1)$ intervallumok összhossza 1, tehát együtt kiadják a teljes $[0,1]$ intervallumot. Ez csak úgy lehet, ha P_u egybeesik P_b-vel. Ez viszont nem lehetséges, mert $u > b$. ■

5.5. Megjegyzés. A b szám definíciója miatt P_b-től jobbra nincsen P_i pont ($i = 1, \ldots, N$), tehát $(P_b, 1)$ hézag, és a hossza β. Így az 5.4. Tétel érvényes $u = b$-re is, ha úgy tekintjük, hogy $P_{u-b} = P_0 = 1$ (a $P_0 = 1$ azonosítás teljesen természetes, amikor a pontokat a 4. ábrán látható módon körön ábrázoljuk).

5.6. Tétel. *Ha $N - a < t < b$, akkor a P_t pont közvetlenül megelőzi a P_{t+a-b} pontot, és $P_tP_{t+a-b} = \alpha + \beta$.*

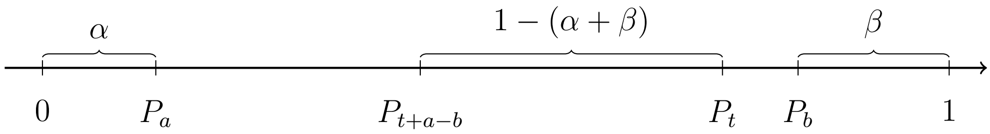
Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy az $N - a < t < b$ feltételből következik, hogy $0 \le N - b < t + a - b < a \le N$, és így a P_{t+a-b} pont a $P_1, \ldots, P_N$ pontok valamelyike.

Csak $a > b$-re bizonyítjuk az állítást, a $b < a$ eset hasonlóan igazolható.



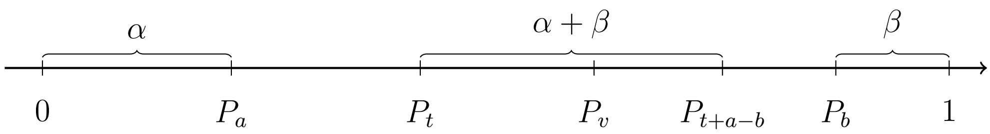
Definíció szerint a $(0, P_a)$ és $(P_b, 1)$ intervallumok hossza rendre α és β. Így $P_aP_b = 1-(\alpha+\beta)$. Másrészt $a > b$ miatt az 5.2. Lemma szerint $P_aP_b = 1-\{(a-b)\theta\}$. Összevetve a két eredményt kapjuk, hogy $\{(a-b)\theta\} = \alpha + \beta$. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy P_{t+a-b} a P_t pont melyik oldalán van.

- P_{t+a-b} balra van P_t-től.



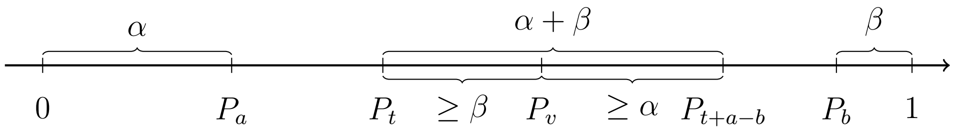
Mivel $t + a - b > t$, ezért az 5.2. Lemma szerint a $P_{t+a-b}P_t$ távolság $1 - \{(a - \ b)\theta\} = 1 - (\alpha + \beta)$. Így a $(0, P_a)$, (P_{t+a-b}, P_t) és $(P_b, 1)$ intervallumok összhossza 1. Ez csak úgy lehetne, ha P_t egybeesik P_b-vel, ez azonban $t < b$ miatt nem lehetséges.

- P_{t+a-b} jobbra van P_t-től.



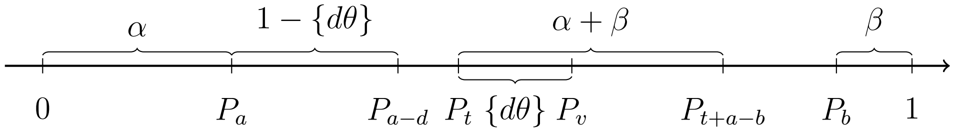
Az 5.2. Lemma szerint $P_tP_{t+a-b} = \{(a-b)\theta\} = \alpha + \beta$. Indirekt módon tegyük fel, hogy P_t és P_{t+a-b} között van egy P_v pont valamilyen $v \in \{0, 1, \ldots, N\}$-re. Külön vizsgáljuk a $v < t$ és $v > t$ eseteket.

◇ $v < t$



Használva, hogy $v < t < t + a - b$, az 5.2. Lemma alapján $P_tP_v \geq \beta$ és $P_vP_{t+a-b} \geq \alpha$. Mivel $P_tP_v + P_vP_{t+a-b} = P_tP_{t+a-b} = \alpha + \beta$, ezért mindkét esetben egyenlőség van. Az 5.2. Lemma szerint így $v = t - b$. Ez ellentmondás, mert $t - b < 0$, és így v nem eleme a $\{0, 1, \dots, N\}$ halmaznak.

◇ $v > t$



Legyen $d = v - t$. Ekkor $d > 0$, hiszen $v > t$. Mivel $a > a - d = a - v + t \geq a - N + t > 0$, ezért P_{a-d} a $P_1, \dots, P_{a-1}$ pontok valamelyike. A P_{a-d} pont a $(P_a, P_b]$ intervallumba esik, így a P_aP_{a-d} távolság legfeljebb $1 - (\alpha + \beta)$. Másrészt az 5.2. Lemma szerint $P_aP_{a-d} = 1 - \{d\theta\}$. Tehát $1 - \{d\theta\} \leq 1 - (\alpha + \beta)$, és így $\{d\theta\} \geq \alpha + \beta$. Az 5.2. Lemma szerint $P_tP_v = \{(v - t)\theta\} = \{d\theta\}$, ami legalább $\alpha + \beta$. Ez ellentmondás, mert így P_v nem lehet a P_t és P_{t+a-b} pontok között.

■

Az eddigieket foglalja össze a következő tétel:

5.7. Tétel. *Legyen θ irracionális szám, és tekintsük a $[0, 1]$ intervallumon a $P_n = \{n\theta\}$ pontokat ($n = 0, 1, \dots, N$). Jelölje $\alpha = \{a\theta\}$ és $1 - \beta = \{b\theta\}$ az $\{n\theta\}$ ($n = 1, \dots, N$) számok közül a legkisebbet és a legnagyobbat. Ekkor a $P_0, P_1, \dots, P_N$ pontok között bármely hézag hossza α, β vagy $\alpha + \beta$. Pontosabban ezek a hézagok a következők.*

- *Ha $0 \leq s \leq N - a$, akkor a P_s pont közvetlenül megelőzi a P_{s+a} pontot, és $P_sP_{s+a} = \alpha$.*
- *Ha $N - a < t < b$, akkor a P_t pont közvetlenül megelőzi a P_{t+a-b} pontot, és $P_tP_{t+a-b} = \alpha + \beta$.*
- *Ha $b \leq u \leq N$, akkor P_u közvetlenül megelőzi a P_{u-b} pontot, és $P_uP_{u-b} = \beta$. (Az $u = b$ esetben az 5.5. Megjegyzésnek megfelelően $P_{u-b} = P_0 = 1$.)*

Látjuk, hogy az α hosszúságú hézagok száma $N - a + 1$, a β hosszúaké $N - b + 1$, az $\alpha + \beta$ hosszúaké pedig $a + b - N - 1$ (ez a szám az 5.1. Lemma szerint nemnegatív). Ebből látható, hogy ha $a + b = N + 1$, akkor nem lép fel $\alpha + \beta$ hosszúságú hézag. A hézagok összhossza

$$(N - a + 1)\alpha + (N - b + 1)\beta + (a + b - N - 1)(\alpha + \beta) = b\alpha + a\beta.$$

A hézagok kitöltik a $[0,1]$ intervallumot, így $b\alpha + a\beta = 1$. Legyen $A = \lfloor a\theta \rfloor$ és $B = \lfloor b\theta \rfloor + 1$. Ekkor $b\alpha + a\beta$ a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} b\alpha + a\beta &= b(\{a\theta\}) + a(1 - \{b\theta\}) = b(a\theta - \lfloor a\theta \rfloor) + a(1 - (b\theta - \lfloor b\theta \rfloor)) \\ &= b(a\theta - A) + a(B - b\theta) = aB - bA. \end{aligned}$$

Így $aB - bA = 1$. Ebből következik, hogy a és A, illetve b és B relatív prímek. Az A és B számok definíciójából következik, hogy $\frac{A}{a} < \theta < \frac{B}{b}$. Mivel $1 \leq a, b \leq N$, ezért az $\frac{A}{a}$ és $\frac{B}{b}$ törtek az N-edik Farey-sorozatból valók. A legkisebb nevezőjű tört $\frac{A}{a}$ és $\frac{B}{b}$ között $\frac{A+B}{a+b}$. Mivel az 5.1. Lemma szerint $a + b > N$, ezért $\frac{A+B}{a+b}$ már nincs benne az N-edik Farey-sorozatban. Tehát $\frac{A}{a}$ és $\frac{B}{b}$ két szomszédos tört az N-edik Farey-sorozatban. Így az a és b számok úgy is megkaphatók, hogy vesszük a θ-t közrefogó két törtet az N-edik Farey-sorozatban, és tekintjük azok nevezőit. Van olyan bizonyítása a három hézag tételnek, amely így definiálja az a és b számokat, és ebből vezeti le az állítást [10].

5.8. Példa. Térjünk vissza a $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $N = 14$ példára. A $\{\frac{\sqrt{3}}{3}\}, \{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\}, \ldots, \{14\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\}$ számok közül a $\{7\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\}$ a legkisebb és a $\{12\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\}$ a legnagyobb. Így ebben a példában $a = 7$ és $b = 12$. Ekkor $\alpha = \{7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\} \approx 0,04145$, $\beta = 1 - \{12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\} \approx 0,0718$, $A = \lfloor 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \rfloor = 4$ és $B = \lfloor 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \rfloor + 1 = 7$. Alkalmazzuk az 5.7. Tételt erre a példára. Ha $0 \leq k \leq 7$, akkor a $P_k P_{k+7}$ hézag, és a hossza $\alpha \approx 0,04145$. Ha $8 \leq k \leq 11$, akkor $P_k P_{k-5}$ hézag, és a hossza $\alpha + \beta \approx 0,11325$. A $P_{13}P_1$, a $P_{14}P_2$ és a $(P_{12}, 1)$ hézagok hossza pedig $\beta \approx 0,0718$. A 3. ábrán az α hosszúságú hézagok pirossal, a β hosszúak zölddel, az $\alpha + \beta$ hosszúságúak pedig kékkel vannak jelölve. A $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ számot közrefogó két tört a 14-edik Farey-sorozatban a $\frac{4}{7}$ és a $\frac{7}{12}$.

6. A három hézag tétel rácsokkal

Tekintsük ismét a $P_n = \{n\theta\}$ pontokat ($n = 0, 1, \ldots, N$). Ezek $N+1$ részre osztják a $[0,1]$ intervallumot. Legyen $s_{k,N} = \min\{\{(l-k)\theta\} \,|\, 0 \leq l \leq N,\, l \neq k,\, l \in \mathbb{Z}\}$.

6.1. Tétel. *A P_k pont utáni hézag hossza $s_{k,N}$ ($k = 0, 1, \ldots, N$).*

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg, hogy $\{(l-k)\theta\}$ hogyan függ össze a P_k és P_l pontok távolságával. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a P_l pont P_k melyik oldalán van.

- A P_l pont jobbra van P_k-tól.

  Ha $l > k$, akkor az 5.2. Lemma szerint $\{(l-k)\theta\} = P_k P_l$. Ha $l < k$, akkor a 2.2. és az 5.2. Lemma alapján $\{(l-k)\theta\} = 1 - \{(k-l)\theta\} = P_k P_l$.

- A P_l pont balra van P_k-tól.

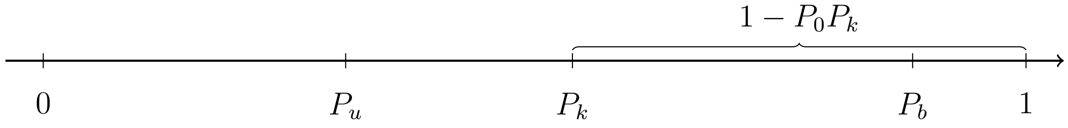
  Az 5.2. Lemmából következik, hogy ha $l > k$, akkor $\{(l-k)\theta\} = 1 - P_l P_k$. Ha $l < k$, akkor a 2.2. és 5.2. Lemmákat alkalmazva kapjuk, hogy $\{(l-k)\theta\} = 1 - \{(k-l)\theta\} = 1 - P_l P_k$.

Először tegyük fel, hogy $k = b$. Ekkor a P_l ($l = 0, 1, \ldots, N$, $l \neq k$) pontok mindegyike P_k-tól balra helyezkedik el. Így

$$s_{k,N} = \min\{1 - P_l P_k \,|\, 0 \leq l \leq N, l \neq k,\, l \in \mathbb{Z}\}.$$

Mivel $1-P_lP_k$ akkor minimális, ha $l=0$, ezért $s_{k,N}=1-P_0P_k$, ami éppen a $(P_k,1)$ hézag hossza.

Most tegyük fel, hogy $k \neq b$. Tegyük fel, hogy a P_u pont balra helyezkedik el P_k-tól.



Ekkor

$$\{(u-k)\theta\} = 1-P_uP_k \geq 1-P_0P_k > P_kP_b = \{(b-k)\theta\}.$$

Így ha valamilyen u-ra P_u balra van P_k-tól, akkor $\{(u-k)\theta\}$-t kivehetjük az $s_{k,N}$ definíciójában szereplő halmazból, mert ezzel a halmaz minimumát nem változtatjuk. Tehát

$$\begin{aligned} s_{k,N} &= \min\{\{(l-k)\theta\} \,|\, 0 \leq l \leq N, l \neq k,\ l \in \mathbb{Z} \text{ és a } P_l \text{ pont jobbra van } P_k\text{-tól}\} \\ &= \min\{P_kP_l \,|\, 0 \leq l \leq N, l \neq k,\ l \in \mathbb{Z} \text{ és a } P_l \text{ pont jobbra van } P_k\text{-tól}\}, \end{aligned}$$

és ez éppen a P_k pont utáni hézag hossza. ■

Vegyük észre, hogy $s_{k,N}$ máshogy is írható:

$$\begin{aligned} s_{k,N} &= \min\{\{(l-k)\theta\} \,|\, 0 \leq l \leq N,\ l \neq k,\ l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \min\{\{(l-k)\theta\} > 0 \,|\, 0 \leq l \leq N,\ l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \min\{(l-k)\theta + n > 0 \,|\, 0 \leq l \leq N,\ (l,n) \in \mathbb{Z}^2\} \\ &= \min\{m\theta + n > 0 \,|\, -k \leq m \leq N-k,\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}. \end{aligned}$$

Legyen G a következő rács:

$$G = \mathbb{Z} \cdot (0,1) + \mathbb{Z} \cdot (1,\theta) = \{(m, m\theta+n) \,|\, n,m \in \mathbb{Z}\}.$$

Megmutatjuk, hogy két különböző G-beli rácspontnak nem lehet ugyanaz a második koordinátája. Legyen $Q_1=(m_1, m_1\theta+n_1)$ és $Q_2=(m_2,m_2\theta+n_2)$ tetszőleges két G-beli pont, és tegyük fel, hogy $m_1\theta+n_1=m_2\theta+n_2$. Ekkor $(m_1-m_2)\theta = n_2-n_1$. Mivel θ irracionális, ezért ez csak úgy lehet, ha $m_1=m_2$ és $n_1=n_2$. Ez viszont azt jelenti, hogy Q_1 egybeesik Q_2-vel.

Legyen $D = G \cap ([-N,N] \times \mathbb{R}^+)$ és $E = G \cap ([-k, N-k] \times \mathbb{R}^+)$. Vegyük észre, hogy $s_{k,N}$ a legkisebb második koordinátájú E-beli pont második koordinátája. Legyen $R=(r_1,r_2)$ a legkisebb második koordinátával rendelkező rácspont D-ben. Ha $R \in E$, akkor $s_{k,N}=r_2$. Tegyük fel, hogy lR benne van E-ben valamilyen l pozitív egész számra. Megmutatjuk, hogy ekkor R is benne van E-ben. Legyen $F = [-k, N-k] \times \mathbb{R}_0^+$. Mivel $lR \in E$, ezért $lR \in F$ is teljesül. Az $O=(0,0)$ pont is benne van F-ben. Mivel F konvex, ezért az O és lR pontok által meghatározott szakasz minden pontja benne van F-ben. Így $R \in F$. Az R pont második koordinátája pozitív, így R benne van a $[-k,N-k] \times \mathbb{R}^+$ halmazban. Ebből következik, hogy $R \in E$, hiszen R rácspont. Így ha R nincs benne E-ben, akkor lR sincs benne. Legyen $S=(s_1,s_2)$ a legkisebb második koordinátával rendelkező pont D-ben, amely nem áll elő lR alakban semmilyen l pozitív egész számra. Az eddigiek alapján ha $R \notin E$ és $S \in E$, akkor $s_{k,N}=s_2$.

Tekintsük az $S-R=(s_1-r_1, s_2-r_2)$ pontot. Ez a pont nem áll elő lR alakban, továbbá teljesül, hogy $0 < s_2-r_2 < s_2$. Az S pont definíciója miatt ez csak úgy lehet, ha $S-R \notin D$. Így $|s_1-r_1| > N$.

Tegyük fel, hogy az R és S pontok egyike sincs E-ben. Feltehető, hogy $s_1 < r_1$ (az $s_1 > r_1$ eset hasonló). Mivel $R, S \in D \setminus E$ és $s_1 + N < r_1$, ezért az S pont E-től balra, R pedig E-től jobbra van. Így

$$-N \leq s_1 < -k < N - k < r_1 \leq N.$$

Ez alapján teljesül, hogy

$$-k = (N-k) + (-N) < r_1 + s_1 < N + (-k) = N - k.$$

Így az $R + S = (r_1 + s_1, r_2 + s_2)$ pont benne van E-ben. Az 5. ábrán szemléltetjük a rácsot a $\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $N = 6$ és $k = 4$ értékekre.

Tegyük fel, hogy létezik egy $U = (u_1, u_2)$ pont E-ben, amelyre $u_2 < r_2 + s_2$. Mivel R és S nincs benne E-ben, ezért $u_2 > s_2$. Az U pont és az $R + S$ pont benne van E-ben, így $-k \leq u_1, r_1 + s_1 \leq N - k$. Így $-N \leq r_1 + s_1 - u_1 \leq N$. Tehát az $R + S - U = (r_1 + s_1 - u_1, r_2 + s_2 - u_2)$ pont benne van D-ben. Mivel $u_2 > s_2$, ezért $r_2 + s_2 - u_2 < r_2$, tehát $R + S - U$ olyan D-beli pont, amelynek második koordinátája kisebb, mint R második koordinátája. Ez viszont ellentmond R definíciójának. Így $R + S$ a legkisebb második koordinátájú pont E-ben. Tehát ha R és S sincs benne E-ben, akkor $s_{k,N} = r_2 + s_2$.

Azt kaptuk, hogy $s_{k,N}$ értéke legfeljebb háromféle lehet: r_2, s_2, vagy $r_2 + s_2$. A 6.1. Tétel szerint $s_{k,N}$ a P_k pont utáni hézag hossza. Így a P_k pontok közötti hézagok hossza legfeljebb háromféle lehet.

7. Három hézag három mondatban

F. Liang [4] egy rendkívül rövid és elegáns bizonyítást adott a három hézag tételre, ennek P. Shiu [7] által tovább egyszerűsített gondolatmenetét ismertetjük. A korábbi fejezetekben bevezetett jelöléseket használjuk, de ezúttal a $[0,1]$ intervallum két végpontját azonosítva, egységnyi kerületű körön ábrázoljuk a $P_n = \{n\theta\}$ ($n = 0, 1, \ldots, N$) pontokat (lásd a 4. ábrát). Ha P_r közvetlenül megelőzi a P_s pontot, akkor a $\overset{\frown}{P_r P_s}$ ívet itt is hézagnak nevezzük. Jelölje $\overset{\frown}{P_r P_s} + k\theta$ azt az ívet, amit a $\overset{\frown}{P_r P_s}$ ívből kapunk, ha k-szor elforgatjuk θ-val (pontosabban a θ hosszúságú ívhez tartozó $\theta \cdot 2\pi$ középponti szöggel). Például a 3. és 4. ábrákon látható esetben $\overset{\frown}{P_2 P_9} + 2\theta = \overset{\frown}{P_4 P_{11}}$ egy hézag, ugyanakkor a $\overset{\frown}{P_{11} P_6} + 2\theta = \overset{\frown}{P_{13} P_8}$ ív már nem hézag (mert rajta van a P_1 pont), és a $\overset{\frown}{P_{13} P_1} + 2\theta$ ív sem hézag, mert a $\{15\theta\}$ számot már nem ábrázoltuk.

A három hézag tétel alábbi bizonyítása mindössze három mondat, így nem meglepő, hogy kissé *hézagos*, de valójában P. Shiu [7] bizonyításának teljes gondolatmenetét tartalmazza, és az olvasó könnyen kitöltheti a hézagokat.

7.1. Tétel. *Tetszőleges θ irracionális szám és N pozitív egész szám esetén a $P_n = \{n\theta\}$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$ pontok által meghatározott körívek legfeljebb háromféle hosszúságúak lehetnek.*

Bizonyítás. Mivel θ irracionális, ha egy tetszőleges $\overset{\frown}{P_r P_s}$ hézagot elég sokszor elforgtunk θ-val, akkor előbb-utóbb olyan $\overset{\frown}{P_r P_s} + k\theta$ ívet kapunk, ami már nem hézag. Ha a legkisebb ilyen k-t tekintjük, akkor $\overset{\frown}{P_u P_v} := \overset{\frown}{P_r P_s} + (k-1)\theta$ még hézag, de

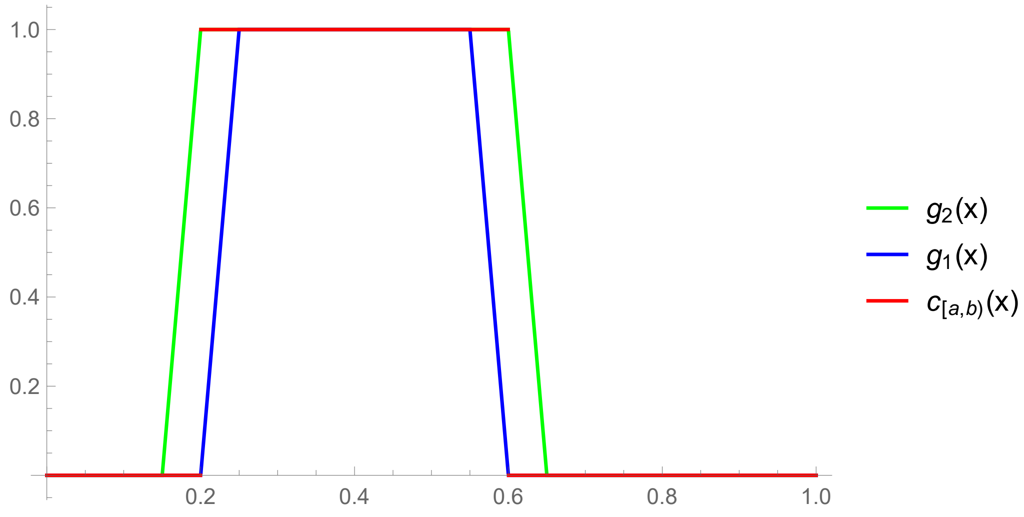
$\overset{\frown}{P_r P_s} + k\theta = \overset{\frown}{P_u P_v} + \theta$ már nem az. Háromféle oka lehet annak, hogy $\overset{\frown}{P_u P_v} + \theta$ már nem hézag:

1. $u = N$, és így a P_u pont elforgatottja már nincs ábrázolva (ekkor tehát $\overset{\frown}{P_r P_s}$ ugyanolyan hosszú, mint a P_N melletti egyik hézag);

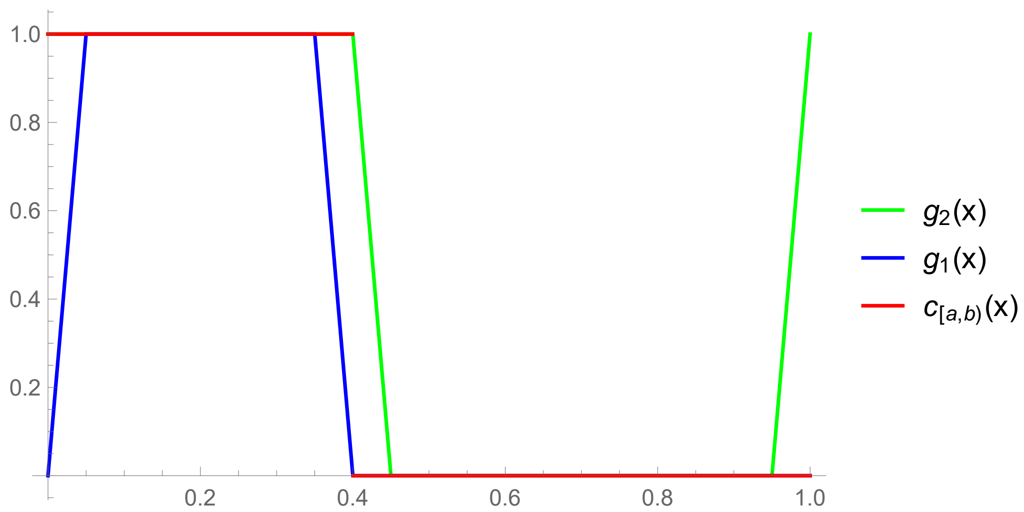
2. $v = N$, és így a P_v pont elforgatottja már nincs ábrázolva (ekkor tehát $\overset{\frown}{P_r P_s}$ ugyanolyan hosszú, mint a P_N melletti másik hézag); vagy pedig

3. a $\overset{\frown}{P_u P_v} + \theta$ ív mindkét végpontja ábrázolva van, de belsejébe esik egy harmadik P_w ábrázolt pont, ami csak P_0 lehet, ellenkező esetben ugyanis $\overset{\frown}{P_u P_v}$ tartalmazná a P_{w-1} pontot (ekkor tehát $\overset{\frown}{P_r P_s}$ ugyanolyan hosszú, mint a P_0 melletti két hézag együtt, azaz $\alpha + \beta$).

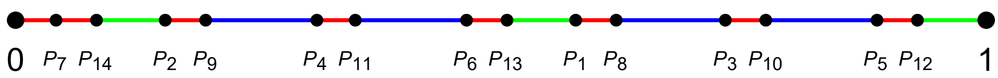
■



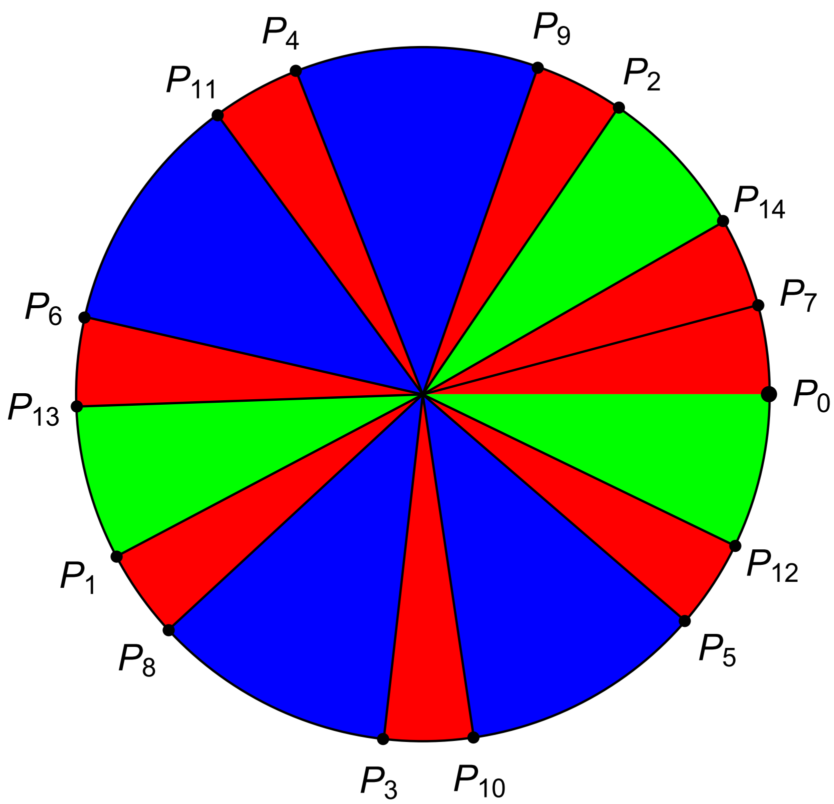
1. ábra.



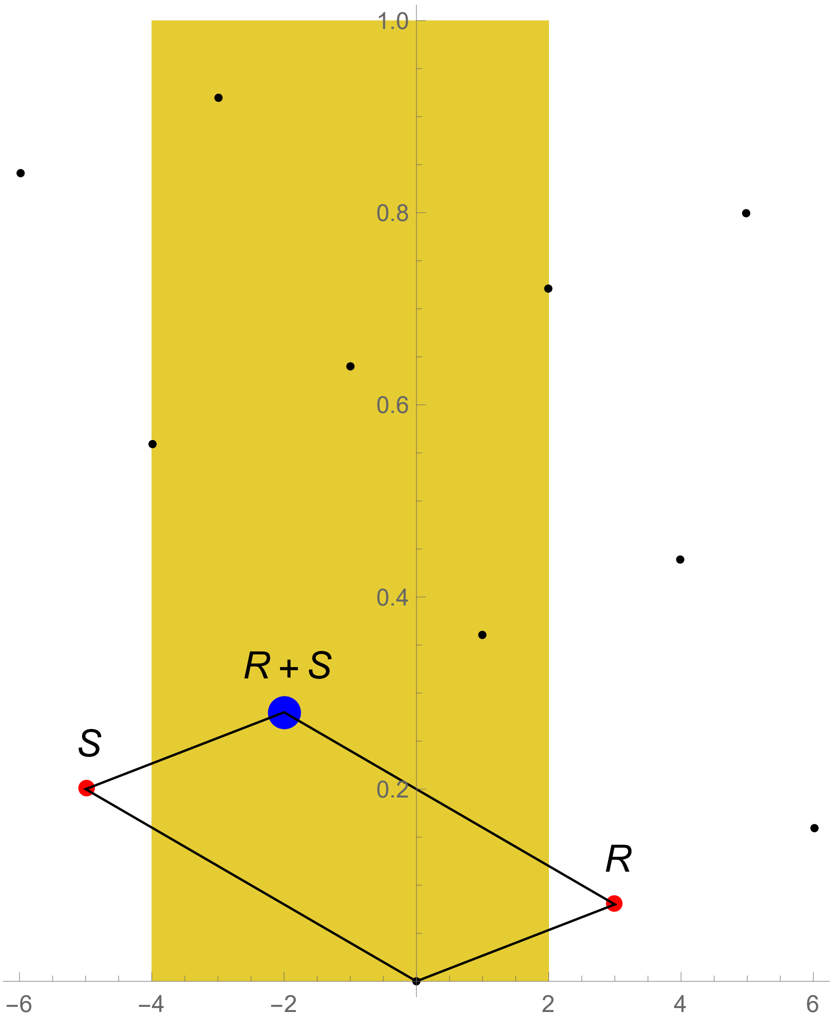
2. ábra.



3. ábra.



4. ábra.



5. ábra.

Hivatkozások

[1] H. Don: *On the distribution of the distances of multiples of an irrational number to the nearest integer,* Acta Arith. **139** (2009), 253–264.

[2] J. H. Halton: *The distribution of the sequence* $\{n\xi\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$*,* Proc. Cambridge Philos. Soc. **61** (1965), 665–670.

[3] L. Kuipers, H. Niederreiter: *Uniform distribution of sequences,* Wiley-Interscience (John Wiley & Sons), New York-London-Sydney, 1974.

[4] F. M. Liang: *A short proof of the* 3d *distance theorem,* Discrete Math. **28** (1979), 325–326.

[5] J. Marklof, A. Strömbergsson: *The three gap theorem and the space of lattices,* Amer. Math. Monthly **124** (2017), 741–745.

[6] T. van Ravenstein: *The three gap theorem (Steinhaus conjecture),* J. Austral. Math. Soc. Ser. A **45** (1988), 360–370.

[7] P. Shiu: *A footnote to the three gaps theorem,* Amer. Math. Monthly **125** (2018), 264–266

[8] N. B. Slater: *Gaps and steps for the sequence* $n\theta \mod 1$*,* Proc. Cambridge Philos. Soc. **63** (1967), 1115–1123.

[9] V. T. Sós: *On the distribution* mod 1 *of the sequence* $n\alpha$*,* Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. **1** (1958), 127–134.

[10] J. Surányi: *Über die Anordnung der Vielfachen einer reellen Zahl* mod 1*,* Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. **1** (1958), 107–111.

[11] S. Świerczkowski: *On successive settings of an arc on the circumference of a circle,* Fund. Math. **46** (1958), 187–189.

[12] S. Tabachnikov: *Geometry and billiards,* Student Mathematical Library **30**, American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005.

[13] A. Zorzi: *An elementary proof for the equidistribution theorem,* Math. Intelligencer **37** (2015), 1–2.

Nyilatkozat

Alulírott Nagy-György Pál kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

2018. május 12.

Nagy-György Pál